

## Titre I

# *Rêverie d'un vieil horloger*

« Il a bien fallu un Horloger pour créer l'Univers » avait lâché **Voltaire** de ses lèvres décharnées. Ajoutons que l'Horloger, du coup, créa les Nombres.

Nos lointains ancêtres semblaient adorer le Grand Horloger qui leur avait livré aussi grande merveille que les **Nombres**. Il a été trouvé à la limite du Congo et de l'Ouganda, au village d'**Ishango**, deux os portant des entailles rangées de façon aussi ordonnée que mystérieuse ; ces os dateraient de quelques 20 000 ans. Malgré de nombreuses interprétations, il n'est pas discutable qu'une série d'entailles se trouvent groupées selon **11, 13, 17, 19** qui sont les Nombres Premiers compris entre **10** et **20**. On a aussi trouvé dans une grotte de la chaîne montagneuse des **Lebombo**, au Swaziland un péroné de babouin comportant **29** entailles ; il daterait de 37 000 ans ; **29** : un nombre premier ?

Nos ancêtres savaient donc compter et mieux encore.

L'ordonnement des Nombres fut un très long combat. Toute comptabilité nécessite une base ; **2, 3, 5** et les combinaisons de des bases sont utilisés depuis la nuit des temps.

Certaines peuplades disent : un, deux ou plusieurs. Seraient-elles copiées par nos ordinateurs qui alignent inlassablement les **0** ou les **1**.

Après **2** vient **3** ; il est facile de distinguer jusqu'à trois objets (même certains oiseaux, dit-on, le peuvent).

Et puis **5**.

Les Nombres les plus simples, deux, trois et cinq résistent au moins depuis les temps lointains de Babylone. Deux fois trois sert à compter le temps mais aussi à parcourir les méridiens ; et voilà que temps et distances sont liés. Trois marié avec les puissances de deux fournit les douzaines et les demi douzaines du commerce, mais aussi les soixante secondes, les soixante minutes, les vingt-quatre heures de la journée, les vingt-quatre méridiens horaires ; et les trimestres et semestres ; et tant d'autres quantités.

Les doigts de la main qui sont à l'origine du calcul digital ont fini par l'emporter, eux qui sont au nombre de cinq dans chaque main et qui permettent rapidement de grouper les objets par deux quintes ou dizaines.

Et même, peut-être parce que nous possédons quatre membres, la base vingt a pu longtemps prospérer et laisser des traces jusqu'à nos jours (quatre-vingt, cinq-vingt ...)

Mariées avec deux ou trois, les quinzaines fournissent trois cent soixante degrés de longitude, si bien que l'on voit défiler quinze degrés de longitude en une heure de temps, soit quinze minutes de longitude en une minute de temps ; et la terre tourne de quinze miles nautiques en une minute de temps au niveau de l'équateur.

Les décomptes élémentaires sont ainsi soumis aux trois plus petits Nombres Premiers : Deux, Trois et Cinq.

Arrive ensuite le Nombre Premier Sept. Il fait franchir un bon à l'esprit humain qui lui associe mystères et merveilles du monde ; qui curieusement lui associe aussi le Nombre de jours de la semaine.

Au-delà, viennent les Nombres Premiers gravés sur l'os d'**Ishango** selon un mystère qui perdure.

Mais voici que le Grand Horloger nous fait bondir jusqu'au Nombre Premier Soixante-Treize lequel, multiplié par Cinq, décompte les Trois-Cent-Soixante-Cinq jours de l'année commune. Rajoutant aux frimas de février un jour de plus tous les quatre ans (avec exception tous les  **$2^7 = 128$**  ans) et les faisant passer de quatre fois Sept jours à Vingt-Neuf (un Nombre Premier). En fait, l'année a une durée variable avec les millénaires et ne saurait se décomposer en Nombres Entiers de jours. De l'ensemble des Nombres Entiers il faut passer à l'ensemble transcendant des Nombres Réels.

Les Nombres Entiers, dont la pleine théorie est loin d'être achevée, ont ainsi été une première et nécessaire source de réflexion de l'homme, grâce au Nombre de ses doigts ou « digits », puis pour les plus évolués grâce à de petits cailloux ou « calculs » ; ces cailloux avec lesquels on peut calculer ont été les ancêtres des bouliers ; mais on peut aussi les arranger selon des figures plus ou moins complexes (par exemple, triangles et autres polygones dont le Nombre des cotés est Premier ou bien ne l'est pas).

En fait, nous vivons depuis toujours avec les Nombres et c'est bien pourquoi à côté des premiers crânes paléo humains dont le volume réservé au cerveau était fort réduit ; à côté de ces premiers crânes, on a pu trouver quelques tibias ou fémurs portant des entailles curieusement ordonnées. La *paléo mystique* semble ainsi avoir attribué aux Nombres un visage divin.

A travers les millénaires, ces compagnons de tous nos jours ont conservé leur aspect immatériel. Innombrables sont leurs adorateurs qui assaillent les Maîtres Horlogers de leurs petits tas de cailloux et de leurs démonstrations trop souvent incorrectes. Les petits adorateurs se font ainsi, par suite de leurs prétentions, rejeter du Monastère des Horlogers. Cependant, un Grand Hôtel s'est ouvert, celui des Financiers à l'affût des plus grands Nombres Premiers pour le cryptage de leurs transactions ; quels rouages secrets conservent-ils jalousement ?

Ah la magie des Nombres ! Il en est un, le plus secret, que le Grand Horloger avait gardé si longtemps par devers Lui, jusqu'à ce qu'un grand maître horloger indien le devine et donne un nom à ce qui n'existe pas : **Zéro**, lequel Zéro sert aussi à indiquer qu'un décompte de base est terminé, rendant ainsi possible le système de numérotation de position ; on ajoute un Zéro au premier chiffre de la suite d'une base et ce Zéro a pour nom 'Zéro de position', si bien que l'écriture **10** peut signifier **2,3,5,6,10** selon la base que l'on utilise.

Ce Zéro permet la gestion des ordinateurs qui ne savent distinguer que deux états auxquels on attribue la valeur Un ou Zéro. De même qu'en base décimale, on passe de **10** aux multiples  **$10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$ , ...  $10^n$ , ...**, on passe en binaire de **2** à  **$2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ ,  $2^4 = 16$ ,  $2^5 = 32$ , ...**

Les premiers ordinateurs travaillaient par groupes de  **$2^3 = 8$**  bits baptisés octets, les mini ordinateurs suivants opérant par groupe de  **$2^4 = 16$**  bits puis  **$2^5 = 32$**  bits....

Et même les tous premiers mini ordinateurs utilisaient des bandes perforées suivant des lignes de **8** trous dont les sept premiers représentaient un nombre (ou tout autre entité codée), le **8ème** trou étant occupé par le bit de *parité* ou de contrôle. Le système d'exploitation lui-même était géré par des suites de trois clefs, en fonction de leur position. La première clef représentait  **$2^0 = 1$**  ou bien **0**, la deuxième  **$2^1 = 2$**  ou bien **0**, la troisième  **$2^2 = 4$**  ou bien **0** ; on obtenait ainsi des valeurs allant de **0** à **7**, soit  **$2^3 = 8$**  au total.

De la façon la plus générale, l'informatique s'appuie sur la relation suivante, qui n'est possible qu'en base **2**.

En effet :

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 4 + 2 + 1 + 1$$

Alors qu'en toute autre base  **$b \neq 2$**  :

$$b^n = (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3} + \dots + b + 1) + 1$$

L'informatique a définitivement consacré le Zéro en tant que Nombre, alors que ce Zéro ne représente et ne décompte, par conséquent, rien.

L'Histoire des Nombres, ou plutôt de leur découverte, a accompagné l'histoire de l'Humanité. Et toujours le Grand Horloger est là qui laisse de temps à autre échapper quelques rouages de son Horloge. Ses Maîtres Horlogers nous ont quelques fois laissé leurs noms : **Euclide**, **Eratosthène**, **Euler**, **Gauss**, **Cantor** et tant d'autres, notamment en Orient. Il existe aussi des 'francs' horlogers tel que **Fermat** ou **Sophie Germain**.

Dans le domaine des Nombres Entiers, que de chemin parcouru et à parcourir à travers les millénaires et combien de découvertes et de redécouvertes ! Et c'est encore peu dire au regard des Nombres Rationnels, Irrationnels, ou encore Transcendants, ou encore Imaginaires...

Nous avons évoqué la découverte du Zéro. Les conséquences et les applications en sont précises, implacables.

Mais l'Infini, c'est-à-dire le non fini, le non borné, l'illimité ?

Sa première définition, selon **Euclide**, consistait à déclarer que l'Infini était une variable qui fuyait toujours plus loin qu'elle-même ; une véritable anguille qui pouvait sans cesse fuir au loin, puisque certaines quadriques se prolongent au-delà du cercle imaginaire tracé sur la sphère à l'Infini.

La notion d'Infini est ainsi une pure abstraction à l'encontre du Zéro qui est parfaitement défini, mais qui serait le discutable inverse d'un indéfinissable Infini.

Incohérence à la base !

Incohérence vis à vis des Nombres du Grand Horloger, lesquels sont associés aux éléments dénombrables et finis des engrenages et rouages de la grande Horloge de l'univers, même si la quantité de ceux-ci est immense.

La prolongation mathématique, immatérielle et illimitée de l'ensemble des Nombres n'a pris un sens qu'avec **Cantor** ; sa théorie procure de l'« épaisseur » à l'Infini ; avec le cardinal minimal  $\aleph_0$  des ensembles en bijection avec les Nombres Entiers, puis avec la suite des ensembles « transfinis » ayant pour cardinaux  $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$

Choquante en apparence, cette association est d'une logique implacable. Il y a, par exemple, équipotence entre l'ensemble des Nombres Entiers et l'ensemble des Nombres Premiers. Pourtant la densité limite des Nombres Premiers est *infiniment* plus petite que celle des Nombres Entiers.

Tout cela choque l'esprit parce que celui-ci ne peut s'empêcher d'associer et de confondre le cardinal avec l'ordinal ou la quantité avec l'emplacement de cette quantité dans l'espace. La tentation de Cantor fut de vouloir associer la mystique à cette logique immatérielle de la pensée humaine ; de transfigurer ainsi l'os d'**Ishango**. Pourtant, tout objet, tout être, toute pensée, toute conscience relève du seul grand mystère métaphysique ; aucun élément de l'univers n'est en fait moins mystérieux que l'autre, qu'il ait une apparence matérielle ou immatérielle. Aucune mystique sérieuse ne peut dissocier le palpable de l'impalpable. Il existe les Nombres que l'on peut encore humainement compter et ceux que l'on ne peut plus compter même avec les plus puissantes machines imaginables. Il reste que, par définition, tout Nombre Entier, aussi grand soit-il, est dénombrable (on peut toujours lui ajouter **1**). Par contre les Nombres Réels qui ont la puissance du continu sont infiniment plus nombreux que les Nombres Entiers, leur cardinalité étant :  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ .

L'œuvre de Cantor a longtemps été contestée et pourtant celle-ci permet des démonstrations qui ne peuvent être atteintes autrement. Nous verrons qu'il en est ainsi de l'infinitude de bien des ensembles à commencer par celle des Nombres Premiers, puis des Nombres Premiers Jumeaux, infiniment moins nombreux que les précédents !

Partout en fait, le miracle est là, si près ou si loin de nous, présence permanente et universelle ; ainsi en est-il des Nombres dont les assemblages, périodicités et échappements nous font penser à une savante horlogerie dont les rotations des engrenages atteignent la cardinalité  $\aleph_0$  et battent d'un mouvement perpétuel un temps dont la cardinalité est au moins égale à  $\aleph_1$ .

Mais passons donc à nos propres petits tas de cailloux qui vont tenter de démonter « l'Horloge des Nombres » petits cailloux que l'on peut exciter en gerbes d'étincelles s'élargissant à l'infini, telles celles de la magnifique Comète de **Goldbach**.

Nous sommes parvenus à démontrer que les découvertes acquises permettent de dévoiler mathématiquement la quasi-totalité des conjectures entourant les mystérieux Nombres Premiers, la Conjecture de **Riemann** restant rebelle.

**Démonter** l'Horloge et en ajoutant un « r », **démontrer** ses mystérieuses propriétés !