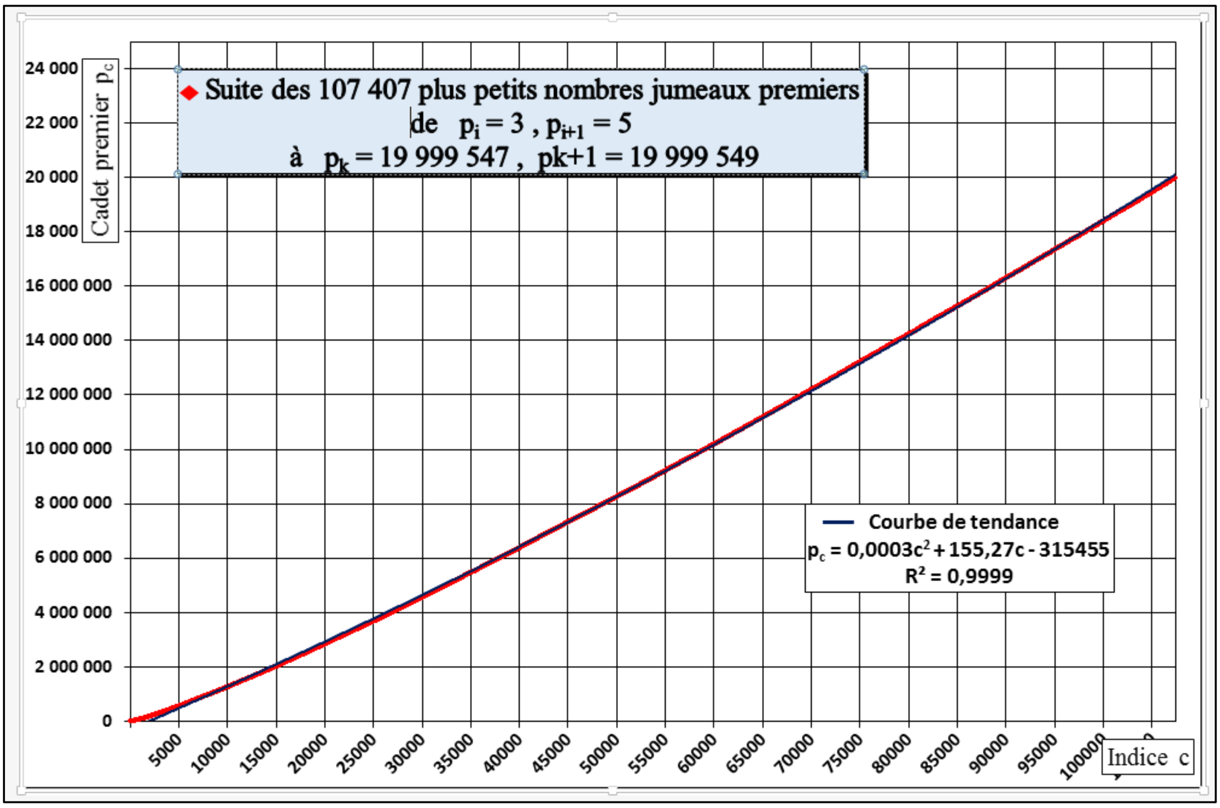
Titre IV

Les Nombres Premiers Jumeaux



IV.1 Introduction

Ces fameux nombres jumeaux valent un titre à part. Tant d'illustres mathématiciens s'y sont intéressés ! Et même, toute *paléo interprétation* mise à part, on en trouve deux paires sur l'os d'**Ishango.**

IV.2 Rappel

IV.2.1 Ecriture des nombres jumeaux

Tout nombre premier étant évidemment premier par rapport à 2 et à 3 peut aussi s'écrire sous la forme $6q+\eta$; $\eta=\pm1$ est en effet le seul reste possible de la division par 6 d'un nombre qui n'est divisible ni par 2 ni par 3. Les nombres premiers en 2 et 3 se regroupent donc par paires dont la différence vaut 2. On dit qu'ils sont jumeaux ; chaque couple de jumeaux comporte un cadet ($6q-1$) et un aîné ($6q+1$) ayant le même paramètre q.

Ces couples sont strictement premiers si et seulement si cadet et aîné sont tous deux strictement premiers

IV.2.2 Les jumeaux sont premiers entre eux, qu'ils soient strictement premiers ou non.

Cf. titre II.2.3

IV.2.3 Critère de primalité

Cf. titres II.6.1à 4

Un nombre aîné $6q+1\geq 7$ est premier si et seulement si

$$q \neq i\eta \bmod (6i+\eta) \quad \forall \ (6i+\eta)\,\text{premier} \leq \left\lfloor \sqrt{6q+1} \right\rfloor$$

Un nombre cadet $6q-1\geq 5$ est premier si et seulement si

$$q \neq -i\eta \bmod (6i+\eta) \quad \forall \ (6i+\eta)\,\text{premier} \leq \left\lfloor \sqrt{6q-1} \right\rfloor$$

Ainsi, des jumeaux $6q\pm1$ seront tous deux premiers si et seulement si

$$q \neq \pm i\eta \bmod (6i+\eta) \quad \forall \ (6i+\eta)\,\text{premier} \leq \left\lfloor \sqrt{6q+1} \right\rfloor$$

IV.3 Quantité illimitée des jumeaux premiers.

Les jumeaux composés ou non sont premiers entre eux ; on dit encore qu'ils sont indépendants, ou encore étrangers l'un par rapport à l'autre. D'autre part, cadets et aînés de même paramètre ont une répartition voisine si bien qu'ils se côtoient sans cesse. Sans constituer une preuve formelle, ces propriétés constituent la raison profonde de la quantité illimitée des jumeaux premiers : indépendance et voisinage les laissent libres de former, ou non, des couples de jumeaux premiers, indéfiniment.

Nous allons en donner une preuve rigoureuse.

IV.3.1 Application du critère de primalité aux jumeaux premiers

Nous invitons le lecteur à consulter le titre précédent que nous résumons ci-dessous.

Deux nombres jumeaux $6q \pm 1$, déjà premiers en 2 et 3, seront aussi premiers par rapport à $p_3 = 5,\ldots, p_k$ si et seulement si leur paramètre commun q vérifie la double condition ci-dessous, i n'étant jamais nul :

$$q \equiv r_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad | \quad r_{i\eta} \neq \pm i \quad \forall (6i+\eta) \leq p_k$$

Cette double condition exprime que le reste de la division du paramètre q par tout nombre premier $6i+\eta$ inférieur ou égal à p_k (mais différent de 2 ou 3) doit être différent en valeur absolue du paramètre i de ce nombre premier. Pour des raisons de symétrie, nous choisissons des restes $r_{i\eta}$ par excès ou par défaut ; ils peuvent donc être positifs ou négatifs et leur valeur absolue restera inférieure à la moitié (moins $\frac{1}{2}$) du diviseur premier $6i+\eta$.

Il y a chaque fois $6i+\eta-3$ restes admissibles dont les valeurs successives sont :

$$-(3i+\eta),\ldots,-(i+\eta),\cancel{-i},-(i-1),\ldots,\cancel{0},\ldots,\cancel{+i},(i+1),\ldots,(3i+\eta)$$

Par exemple, pour

$6i-1=5 \quad | \quad i=1 \Rightarrow r_{i\eta} = -2, \cancel{-1}, \cancel{0}, \cancel{+1}, \text{ou } +2$

$6i+1=7 \quad | \quad i=1 \Rightarrow r_{i\eta} = -3,-2, \cancel{-1}, \cancel{0}, \cancel{+1}, +2 \text{ ou } +3$

$6i-1=11 \quad | \quad i=2 \Rightarrow r_{i\eta} = -5,-4,-3, \cancel{-2}, -1, \cancel{0}, +1, \cancel{+2}, +3, +4, \text{ou } +5$

L'existence de deux jumeaux $6q \pm 1$ premiers par rapport à $p_3 = 5,\ldots, p_k$ relève donc du théorème des restes chinois car

$$\begin{aligned} q &= r_3 \bmod (p_3 = 5) \\ q &= r_4 \bmod (p_4 = 7) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q &= r_{j\eta} \bmod (p_k = 6j+\eta) \end{aligned} \qquad (4,1)$$

les deux valeurs $\pm i$ étant chaque fois interdites aux restes $r_{i\eta}$ de la division du paramètre q par les nombres premiers successifs $6i+\eta$.

Posant $\prod_{j=3}^{k} p_j = \Pi_k$, les congruences (4,1) ont une solution commune $q_{nk} \equiv \overrightarrow{r_{nk}}.\overrightarrow{e_k} \bmod \Pi_k$ et le nombre de solutions $6q_{nk}+\eta$ premières jusqu'en p_k est égal à

$$N_k = (5-2)(7-2)(11-2)\ldots\ldots(p_k-2) \quad p_k \qquad (4,2)$$

Dans chaque intervalle d'extension Π_k fermé inférieurement.

Lorsque p_k augmente indéfiniment, N_k augmente encore plus vite.

A chaque vecteur $\overrightarrow{r_{nk}}$ et donc à chaque paramètre q_{nk} correspond

- soit un couple de jumeaux strictement premiers,
- soit un couple de jumeaux tous les deux premiers par rapport à $5,\ldots, p_k$ seulement, mais dont l'un au moins est multiple de facteurs supérieurs à p_k (ce que nous abrégeons en disant que ces jumeaux sont premiers jusqu'en p_k seulement).

Ces couples ont pour expression $(6q_{nk} \pm 1) \bmod \Pi_k$.

Ainsi dans l'intervalle $(0, \Pi_k)$, on trouve N_k paramètres de couples de jumeaux qui sont, soit premiers, soit multiples de facteurs supérieurs à p_k.

Dans tous les autres intervalles $(x\Pi_k, (x+1)\Pi_k)$ $\forall (x>0)$ on trouve la même quantité constante N_k de paramètres de couples de jumeaux premiers jusqu'en p_k, certains de ces jumeaux pouvant être strictement premiers. Cela n'a rien d'étonnant puisque l'on ajoute des multiples de Π_k à des nombres qui ne sont pas divisibles par $2,3, 5,\ldots$et p_k. Les nombres jumeaux premiers jusqu'en p_k ont aussi leur horloge !

IV.3.2 Infinitude des couples de jumeaux strictement premiers

Démonstration :

D'après l'expression (4.2) appliquée à chaque intervalle d'extension Π_k

$$N_k = (5-2)(7-2)(11-2)\ldots\ldots\ldots(p_k-2),$$

les nombres premiers p_k et les quantités N_k de jumeaux premiers jusqu'en p_k sont en bijection par l'intermédiaire de leur ordinal k avec les nombres entiers k.

L'ensemble des quantités N_k est donc équipotent avec celui des nombres entiers. La limite de N_k est ainsi égale à $\aleph_0$ de même que celle de k et de p_k.

Plus prosaïquement, lorsque l'entier k devient infini, le nombre premier p_k d'ordinal k devient infini ; les nombres premiers jusqu'en p_k deviennent strictement premiers et leur quantité N_k devient infinie.

Les couples de jumeaux premiers sont en quantité infinie $\aleph_0$

$\square$

IV.4 Densité limite des nombres premiers jumeaux

Le plus grand nombre aîné lié à l'intervalle $\prod_1^k p_i = 6\Pi_k$ a pour valeur $6\Pi_k + 1$ et dans chacun des intervalles successifs de grandeur $6\Pi_k$ la densité des couples de jumeaux $6q_{nk} \pm 1$ premiers par rapport à $2,3,5,\ldots, p_k$ s'écrit

$$d_k = N_k/(6\Pi_k + 1) = 1/6(1-2/5)(1-2/7)\ldots\ldots(1-2/p_k) = 1/2\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right) \qquad (4.3)$$

Cette densité varie de $1/6$ pour $p_k = 3$ $(\text{d'indice } k=2)$ à $1{,}162\ \%$ pour, $p_k = 379$ $(\text{d'indice } k=75)$

Les nombres premiers les plus bas $(3,5,7,11,13)$ font plonger rapidement cette densité ; elle décroît ensuite lentement de façon asymptotique vers zéro comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous
Comparons, en effet, cette densité à celle de l'ensemble des nombres premiers laquelle s'écrit :

$$\frac{1}{2}\prod_{i=2}^{k}\left(1-1/p_i\right) \tag{4.4}$$

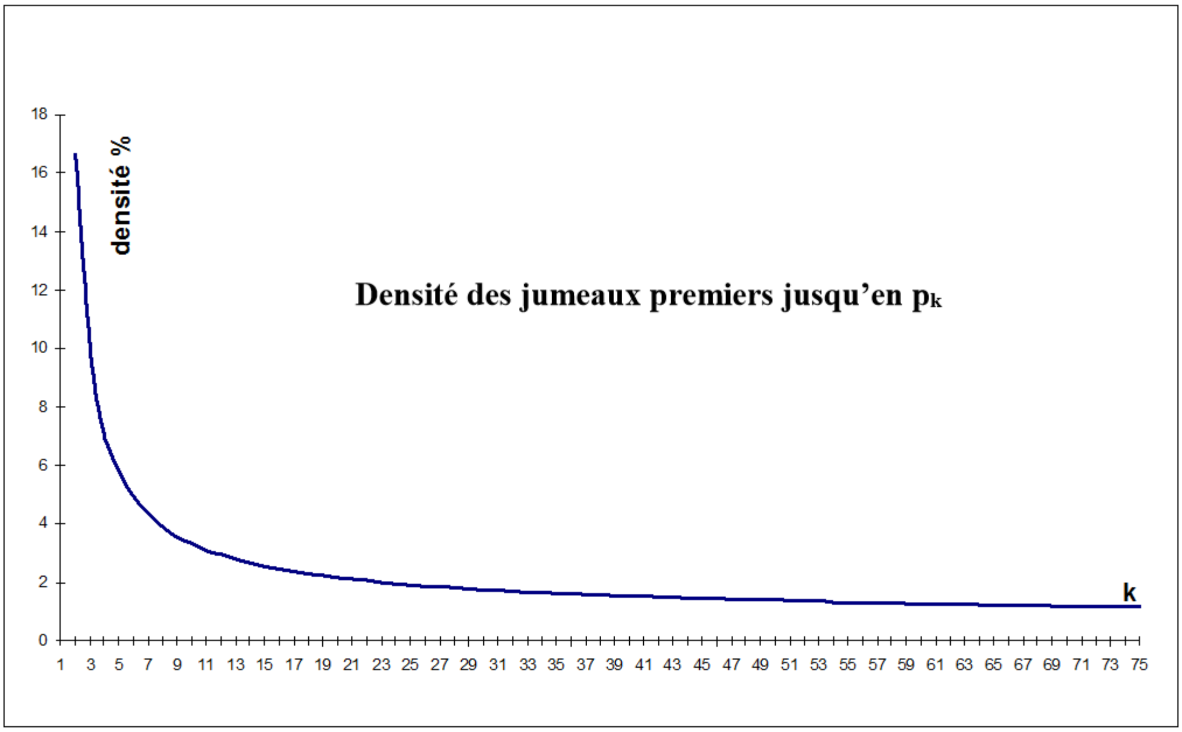
Effectuant le rapport des deux densités, on trouve

$$\prod_{i=2}^{k}\frac{1-2/p_i}{1-1/p_i}=\prod_{i=2}^{k}\left[1-1/(p_i-1)\right]$$

Ce rapport tend vers zéro car chacun de ses facteurs est inférieur à son correspondant dans (4.4) et comme la densité des nombres premiers tend vers 0, la densité limite des jumeaux premiers jusqu'en p_k tend aussi vers 0, mais infiniment plus « vite ». Or lorsque p_k tend vers l'infini, les jumeaux premiers jusqu'en p_k deviennent tous premiers.
Il s'ensuit que pour les grandes valeurs de p_k il existe encore des couples de jumeaux premiers même si le rapport de leur densité à celle des nombres premiers devient petit ; ceci provient de leur raréfaction qui est « affine » de celle des nombres premiers.

Théorème :

La densité limite des jumeaux premiers est infiniment plus petite que celle des nombres premiers.



IV.5 Exploration affinée des couples de jumeaux

IV.5.1 Extension du crible d'Eratosthène

Un nombre premier jusqu'en p_k ne peut être divisible que par des nombres supérieurs à p_k. Le plus petit nombre **impair composé** premier jusqu'en p_k ne peut être que p_{k+1}^2. Il s'ensuit que tous les nombres premiers jusqu'en p_k d'une part, inférieurs à p_{k+1}^2 d'autre part, sont **strictement premiers**.
Cette condition est suffisante ; elle n'est pas nécessaire ; elle n'interdit pas la primalité de certains nombres supérieurs à p_{k+1}^2, puisque ceux-ci doivent nécessairement être premiers au moins jusques en p_k.

Tout couple de nombres jumeaux, dont cadet et aîné sont, d'une part premiers jusqu'en p_k et d'autre part inférieurs à p_{k+1}^2, est un couple de jumeaux strictement premiers.

IV.5.2 Répartition des couples jumeaux strictement premiers

Nous avons montré ci-dessus, que dans l'intervalle $\left(0, 6\Pi_k\right)$, les nombres premiers jusqu'en p_k d'une part, et qui seraient inférieurs à p_{k+1}^2 d'autre part, sont strictement premiers.

Nous avons montré en IV, ci-dessus, que la densité des jumeaux premiers jusqu'en p_k est égale selon (4.3) à :

$$d_k = 1/2 \prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right)$$

Nous avons vu que cette densité est rapidement décroissante, ce qui autorise la proposition ci-dessous.

Comme les nombres jumeaux premiers inférieurs à p_{k+1}^2 sont aussi premiers jusqu'en p_k leur quantité peut aussi s'écrire :

$$\pi_2\left(p_{k+1}^2\right) \geq p_{k+1}^2 \times d_k = \frac{p_{k+1}^2}{2}\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right) \tag{4.5}$$

Lorsque l'on passe de p_k à p_{k+1}, cette inégalité devient :

$$\pi_2\left(p_{k+2}^2\right) \geq \frac{p_{k+2}^2}{2}\left(1-\frac{2}{p_{k+1}}\right)\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right) = \left(\frac{p_{k+2}^2}{2}-\frac{p_{k+2}^2}{p_{k+1}}\right)\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right) \tag{4.6}$$

Posons $p_{k+2} = p_{k+1} + \Delta_k$; la différence entre le premier facteur de (4.6) et celui de (4.5) est :

$$\frac{\Delta_k\left(2p_{k+1}+\Delta_k\right)}{2} - \frac{\left(p_{k+1}+\Delta_k\right)^2}{p_{k+1}} = p_{k+1}\left(\Delta_k - 1\right) + \Delta_k^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{k+1}}\right) - 2\Delta_k$$

Cette expression est positive et son ordre de grandeur est égal à $\Delta_k p_{k+1}$. D'où la **propriété majeure** (et une preuve additionnelle de l'infinité des nombres jumeaux premiers):

Il existe des nombres jumeaux premiers jusqu'en p_k et qui sont inférieurs à p_{k+1}^2. Ils sont strictement premiers ; ils croissent sans cesse avec k.

C'est bien ce que l'on observe sur la figure de la première page de ce titre ; les irrégularités de Δ_k sont gommées telles des fractales par effet d'échelle.

Exemple: les jumeaux premiers jusqu'en p_k

$$\prod_{i=3}^{i=k} p_k = 5\times 7\times 11 = 385 \qquad e_3 = -154 \quad e_4 = -55 \quad e_5 = -175 \qquad r_3 \neq \pm 1 \quad r_4 \neq \pm 1 \quad r_5 \neq \pm 2 \ ;$$

d'où les couples de jumeaux inférieurs à $(p_{k+1})^2 = 169$ dans l'espace $\prod_{i=3}^{i=k} p_k = 385$: ils sont tous strictement premiers.

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{q = \ 0\times 154 + 3\times 55 - 3\times 175 = 25 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (149,151)} \\
\boldsymbol{q = +1^*\times 154 - 3\times 55 - 2^*\times 175 = 24 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (143,145^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +2\times 154 - 2\times 55 - 1\times 175 = 23 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (137,139)} \\
\boldsymbol{q = -2\times 154 - 1^*\times 55 + 0\times 175 = 22 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (131,133^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = \ 0\times 154 + 1^*\times 55 + 2^*\times 175 = 20 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (119^*,121^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +1^*\times 154 + 2\times 55 + 3\times 175 = 19 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (113,115^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +3\times 154 + 4\times 55 - 4\times 175 = 18 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (107,109)} \\
\boldsymbol{q = +2\times 154 + 3\times 55 - 5\times 175 = 17 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (101,103)} \\
\boldsymbol{q = -1^*\times 154 - 2\times 55 - 5\times 175 = 16 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (95^*,97) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = \ 0\times 154 - 1^*\times 55 - 4\times 175 = 15 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (89^*,91) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +1^*\times 154 + 0\times 55 - 3\times 175 = 14 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (83,85^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = -3\times 154 + 1^*\times 55 - 2^*\times 175 = 13 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (77^*,79) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = -2\times 154 + 2\times 55 - 1\times 175 = 12 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (71,73)} \\
\boldsymbol{q = -1^*\times 154 + 3\times 55 + 0\times 175 = 11 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (65^*,67) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = \ 0\times 154 - 3\times 55 + 1\times 175 = 10 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (59,61)} \\
\boldsymbol{q = +1^*\times 154 - 2\times 55 + 2^*\times 175 = 9 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (53,55^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +2\times 154 - 1^*\times 55 + 3\times 175 = 8 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (47,49^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = -2\times 154 + 0\times 55 + 4\times 175 = 7 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (41,43)} \\
\boldsymbol{q = -1^*\times 154 + 1^*\times 55 + 5\times 175 = 6 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (35^*,37) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = \ 0\times 154 + 2\times 55 - 5\times 175 = 5 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (29,31)} \\
\boldsymbol{q = +1^*\times 154 + 3\times 55 - 4\times 175 = 4 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (23,25^*) \bmod 385} \\
\boldsymbol{q = +2\times 154 - 3\times 55 - 3\times 175 = 3 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (17,19)} \\
\boldsymbol{q = -2\times 154 - 2\times 55 - 2\times 175 = 2 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (11,13)} \\
\boldsymbol{q = -1\times 154 - 1\times 55 - 1\times 175 = 1 \bmod 385 \rightarrow 6q\pm 1 = (5,7)}
\end{array}$$

Les paramètres q_{nk} inférieurs à $(169-1)/6=28$ sont explicités ci-dessus jusqu'à 25 (y compris les jumeaux premiers $p_3,..., p_i,..., p_k$ en conservant les restes $r_{i\eta}=\pm i$) ; ici $q=1$ conduit à $r_{1\eta}=\pm 1$, tandis que $q=2$ conduit à $r_{2\eta}=\pm 2$; les jumeaux divisibles par $p_3,..,$ ou $p_i,...$ ou p_k sont repérés par un *, ainsi que les restes responsables $r_{i\eta}$.

Pour des valeurs de $q_{nk}>28$, on trouverait tous les autres jumeaux qui ne sont pas divisibles par $2,3,5,7,\ p_k=11$, avec une périodicité de **385**, indéfiniment ; leurs paramètres sont :

$$q\equiv\left[(r_3\neq\pm 1 \bmod 5)\times 154+(r_4\neq\pm 1 \bmod 7)\times 55+(r_5\neq\pm 2 \bmod 11)\times 155\right] \bmod 385\,,$$

soit par exemple $q\equiv(2\times 154+2\times 55+3\times 175) \bmod 385\equiv 943 \bmod 385$ d'où

$$6q\pm 1\equiv(6\times 943 \bmod 385)\pm 1=(5657 \text{ ou } 5659)+385x$$

$(5657,5659)$ forment un couple de jumeaux qui ne sont pas divisibles par $2,\ 3,\ 5,\ 7$ ou 11. 385 étant par contre divisible par $5{,}7$ et 11, les jumeaux $6q\pm 1$ ci-dessus ne peuvent être divisibles par $2,\ 3,\ 5,\ 7$ ou 11.

On peut vérifier que

pour $p_k=5,\ \ \Pi_k=5,\ \ 6\Pi_k=30$, on trouve bien $(3-2)(5-2)=3$ couples de jumeaux premiers supérieurs à 5 ;

pour $p_k=7,\ \ \Pi_k=35,\ \ 6\Pi_k=210$, on trouve bien $(3-2)(5-2)(7-2)=15$ jumeaux premiers jusqu'en 7 ; ils sont répartis entre 13 couples strictement premiers et 2 couples comportant des multiples de 11 ou 13.

IV.6 La suite des 105 407 premiers jumeaux strictement premiers

Le tableau des 105 407 premiers couples de jumeaux premiers (jusqu'à $19\,999\,547-19\,999\,549<20.10^6$ **)** est donné en feuille 3 du fichier « prem-jumeaux.xlsb » dont le graphe 1 est figuré en page de ce titre.

Sur ledit graphe, en ordonnée la valeur du jumeau premier cadet p_c , en abscisse son indice ou ordinal c. La croissance des jumeaux premiers en fonction de leur indice est d'une belle régularité lorsque la grandeur de l'échelle en masque les fractales.

IV.7 Analogie géométrique

IV.7. 1 Autre caractérisation des jumeaux premiers

Soient deux jumeaux $6q\pm 1=6q+\eta$ premiers en 2 et 3.
Si l'un d'eux au moins, est composé, on peut écrire

$$6q+\eta=(6j+1)(6i+\eta) \tag{4.7}$$

La primalité relative de $6q+\eta$ et $6q-\eta$ impose que $(6j+1)$ et $6i+\eta$ soient tous deux premiers avec $6q-\eta$.

Le produit $(6q+\eta)(6q-\eta)=36q^2-1$ comporte donc au moins trois facteurs premiers dont deux au moins sont différents, ce qu'on écrit

$$36q^2-1=(6j-\eta)(6i+\eta) \tag{4.8}$$

Inversement la relation (4.8) où l'un au moins des deux paramètres $i \neq j$ est différent de q oblige l'un des deux jumeaux $6q \pm 1$ à comporter deux facteurs et par conséquent à être composé.

L'expression $36q^2 - 1 = (6j - \eta)(6i + \eta)$ s'écrit encore

$$q^2 = ij + \eta \frac{j-i}{6} \tag{4.9}$$

Elle caractérise la non primalité de l'un au moins des deux jumeaux $6q \pm 1$

IV.7. 2 Propriété fondamentale des triangles rectangles

Soit un nombre entier a quelconque différent de 2. Nous disons qu'à partir de ce nombre a, il est possible de construire au moins un triangle rectangle dont les trois côtés soient entiers. Soient c la diagonale, a et b les deux autres côtés d'un tel triangle ; on peut écrire d'après **Pythagore,** $c^2 - b^2 = a^2$ d'où :

$$(c-b)(c+b) = a^2 = 2^{2h} p_i^{2k} p_j^{2l} \ldots \tag{4.10}$$

Ecrivons que $c - b$ divise a^2 selon l'expression $c - b = 2^f p_i^g p_j^m \ldots,$

alors, $c + b = 2^{2h-f} p_i^{2k-g} p_i^{2l-m} \ldots$

et

$$b = \frac{2^{2h-f} p_i^{2k-g} p_i^{2l-m} \ldots - 2^f \ldots}{2}, \quad c = \frac{2^{2h-f} p_i^{2k-g} p_i^{2-m} \ldots + 2^f \ldots}{2}$$

Si a est pair, les exposants $2h$ et $f < 2h$ ne doivent pas être nuls.

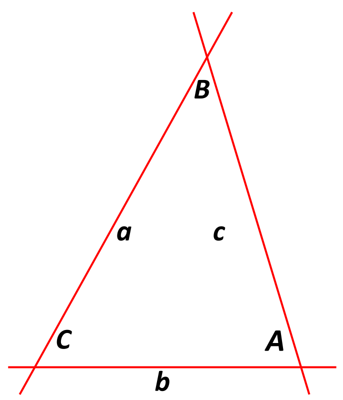
Si a est impair, les exposants $2h$ et f doivent être tous deux nuls.

Si a est premier, l'expression $(c-b)$ ne peut qu'être égale à l'unité $(c+b)$ devenant égale à a^2.

Si $c - b$ est plus grand que $c + b$, on échange b et c.

Lemme

Sur un côté '*a*' de mesure entière, on peut construire une quantité de triangles rectangles dont l'hypoténuse '*c*' et l'autre côté '*b*' sont également de mesure entière. Cette quantité de triangles est égale à la quantité des permutations des puissances des facteurs premiers de '*a*' (moins 2 si '*a*' est un nombre pair), les exposants nuls étant pris en compte.



IV.7.3 Propriété fondamentale des triangles scalènes

Soit un triangle scalène de cotés a, b, c ayant A,B,C pour angles aux sommets.
On peut écrire :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\,, \tag{4.11}$$

soit encore

$$(c-b)(c+b) = a(a - 2b\cos C)$$

Attribuons une valeur entière à a ; examinons si les deux autres côtés peuvent aussi avoir des mesures entières.

Posant $c-b=i$ et $j=a/i$, on trouve :

$$c=b+i \text{ et } c+b=2b+i\text{, d'où } 2b+i=j\left(a-2b\cos C\right) \text{ puis}$$

$$2b\left(1+j\cos C\right)=ja-i \text{ et}$$

$$b=\frac{ja-i}{2\left(1+j\cos C\right)}, \qquad c=\frac{ja-i}{2\left(1+j\cos C\right)}+i$$

Il faut donc que $ja-i$ soit divisible par $2\left(1+j\cos C\right)$, c'est-à-dire que l'angle C soit tel que

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ja-i-2b}{2bj} \qquad (4.12)$$

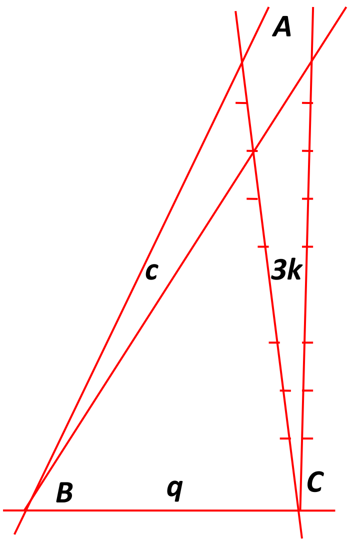
La première expression n'est autre que la relation fondamentale (4.11)

La deuxième expression de $\cos C$ nous montre que pour chaque valeur de a et de $i=c-b$, l'angle C ne peut avoir qu'une seule valeur.

Lemme :

Les trois côtés d'un triangle scalène ont une mesure entière si, et seulement si, un des angles adjacents C à un coté a possède une valeur liée à a mais aussi à la différence $i=c-b$ des deux autres côtés selon la relation (4.12)

IV.7.4 Représentation géométrique des nombres premiers jumeaux



L'expression (4.9) s'écrit aussi $q^2=\left(i+3k\right)^2-9k^2+\eta k$ en posant $k=\dfrac{j-i}{6}$, d'où

$$\left(i+3k\right)^2=q^2+9k^2-\eta k \qquad (4.13)$$

Traçons un triangle ABC de côtés q, $3k$, $c=i+3k$.
Ces côtés respectent la loi

$$c^2=\left(i+3k\right)^2=q^2+9k^2-6kq\cos C$$

qui impose que l'angle C soit tel que $\cos C=\eta/6q$, d'où deux triangles : l'un dont l'angle C est aigu, l'autre dont l'angle C est obtus ; ces deux triangles sont représentatifs de la relation (4.13).
L'angle C ne dépend que du seul paramètre q des jumeaux $6q\pm1$ premiers par rapport à 2 et à 3, mais dont l'un au moins n'est pas strictement premier.
$\cos C$ a une valeur inversement proportionnelle à q et cette valeur tend vers 0 lorsque q tend vers l' infini.

Si, faisant varier $i = c - 3k$ par mesures entières, on peut trouver une mesure entière de k, alors l'un au moins des deux nombres $6q \pm 1$ est composé. Si l'on ne peut trouver aucun couple de nombres entiers i et k associés à q, alors $6q \pm 1$ est un couple de jumeaux premiers.

On notera que $3k = \dfrac{j - i}{2}$ tandis que $c = \dfrac{j + i}{2}$.

Les triangles ABC sont caractéristiques de la primalité des jumeaux ($6q \pm 1$)

IV.7.5 La grandeur des jumeaux premiers n'a pas de limite

Choisissons une valeur du paramètre q *;* à chaque valeur de i, paramètre d'un nombre premier $6i + \eta$, correspondent deux valeurs de k selon l'équation (4.13).

Reportons dans le triangle ABC les deux valeurs de l'angle C telles que $\cos C = \eta / 6q$; puis, pour chaque valeur successive de i, paramètre d'un premier $6i + \eta$ inférieur ou égal à $\sqrt{6q + \eta}$, reportons des valeurs $b = 3k$ sur CA et $c = 3k + i$ sur BA**.** Si les deux segments ainsi constitués se recoupent en A, $6q \pm 1$ ne forment pas un couple de jumeaux premiers.
Inversement, si les deux segments n'ont jamais de point commun quel que soit le nombre premier $6i + \eta$, alors q est le paramètre de deux jumeaux premiers $6q \pm 1$.
On note que les essais ci-dessus sont limités à la quantité de premiers $6i + \eta \le \left\lfloor \sqrt{6q + 1} \right\rfloor$, c'est-à-dire à $\pi\left(\sqrt{6q + 1}\right)$; c'est la raison pour laquelle il n'est pas possible de **toujours** trouver un sommet commun aux deux cotés $c = \dfrac{j + i}{2}$ et $b = 3k = \dfrac{j - i}{2}$, dans lequel cas les deux nombres jumeaux $6q \pm 1$ sont premiers.
La fréquence de ladite impossibilité décroît ave $\pi\left(\sqrt{6q + 1}\right)$ et les nombres jumeaux premiers correspondants se raréfient.
Lorsque q devient grand, C se rapproche de plus en plus d'un angle droit, les couples de triangles ABC deviennent des quasi triangles rectangles en C possédant une quasi diagonale, un côté fixe égal à q, un autre côté variable égal à $3k$. Mais ce sont toujours des triangles scalènes et l'on ne pourra pas systématiquement trouver des cotés AB et BC qui ne se recoupent pas en A.

Il faut atteindre une valeur infinie et toujours fuyante de q pour que le triangle ABC soit vraiment rectangle ; alors même dans cet inaccessible cas, il faut qu'à la base q de valeur « infinie », on puisse associer un autre côté de l'angle droit qui ait pour valeur $3k$.
Si l'on se reporte au paragraphe V.**7.2** et si l'on choisit $a = q$, on constate que l'on trouve un côté entier $b = 3k$ si et seulement si $a = q$ comporte le facteur premier 3. Alors le côté c ne peut à la fois être un multiple de 3 et s'écrire encore $c = 3k + i$ où i est paramètre d'un nombre premier $6i + \eta$.