Titre V
La Conjecture de « Goldbach Polignac »

V.1 Utilisation des nombres premiers relatifs

Les nombres premiers négatifs sont les nombres premiers examinés jusqu'ici mais changés de signe.
Si l'on veut respecter une arithmétique analytique et non point « comptable », il convient de respecter l'ordonnancement algébrique de ces nombres.
Retenant le paramétrage $p = 6q + 1$, les premiers aînés, les plus grands en valeur algébrique s'écrivent toujours :

$$p_{i\eta} = 6i + 1$$

Lorsque $\boldsymbol{i}$ est négatif, les aînés négatifs prennent ainsi la valeur absolue des cadets positifs et vice versa :

$$p_{i\eta} = -6|i| + 1$$

A titre d'exemple, on voit que le nombre premier cadet positif $6 \times 4 - 1 = 23$ est associé au nombre aîné négatif $6 \times (-4) + 1 = -23$.
Cette notion est essentielle car elle seule permet une analyse continue, analyse qui va nous révéler que les deux conjectures de **Goldbach** et de **Polignac** relèvent d'une même vérité analytique.

V.2 Ecriture des nombres pairs

V.2.1 Ecriture générale

Ecrivant de façon littérale la division d'un nombre pair $2n$ par $a < n$, on constate que :

- si $2n$ est premier avec a, $2n$ peut s'écrire
  $2n = 2qa + 2\eta_a\delta_a$, δ_a pouvant prendre toutes les valeurs de $\frac{1-a}{2}$ à $\frac{a-1}{2}$;
- si $2n$ est multiple de a, alors $2n = 2qa$

Ainsi, pour $a = 3$, les nombres pairs s'écrivent $2n = 6q \pm 2\delta$ avec $\delta = (0, \pm 1) = (0, \eta)$ (5.1)

Cette écriture simple présente une curieuse analogie avec l'écriture des nombres premiers par rapport à 2 et 3**.**
Elle permet, par ailleurs, d'étudier dans un tableur trois fois plus de nombres pairs que les expressions $2q$ ou $4q$
.

V.2.2 Lemme : A chaque nombre entier pair $2n = 6q \pm 2\delta$ il est possible d'associer une infinité de couples de deux nombres premiers par rapport à 2 et à 3 (si $\delta \neq 0$) et dont $2n$ soit la somme ou la différence, c'est-à-dire la somme algébrique.

Cela résulte de l'écriture (5.1)

- Pour $2n = 6q + 2\eta$, $2n = (6q_i + \eta) + (6q_j + \eta)$ avec $q = q_i + q_j$

Si q_i et q_j ont le même signe, c'est le fondement de la conjecture de **Goldbach**.

Si q_i et q_j sont de signes contraires, cette relation est équivalente à

$$2n = (6q_i + \eta) - \left(6\left|q_j\right| - \eta\right) \text{ avec } q = q_i - \left|q_j\right| \qquad \text{si } q_i > 0 \text{ et vice versa si } q_i < 0$$

Le nombre de paramètres q_i et q_j associés à n est, dans ce cas, illimité, ceci de $-\infty \rightarrow +\infty$. C'est le fondement de la conjecture de **Polignac**.

- Pour $2n = 6q$, $2n = (6q_i - \eta) + (6q_j + \eta)$ avec $q = q_i + q_j$

Si q_i et q_j ont le même signe, c'est le fondement de la conjecture de **Goldbach**.
Si q_i et q_j sont de signes contraires, cette relation est équivalente à

$$2n = (6q_i - \eta) - \left(6\left|q_j\right| - \eta\right) \text{ avec } n = 3q_i - 3\left|q_j\right| \qquad \text{si } q_i > 0 \text{ et vice versa si } q_i < 0$$

C'est le fondement de la conjecture de **Polignac**. Cette dernière s'applique à tous les couples premiers, alors que **Goldbach** ne concerne que les couples premiers de l'espace $(0, 2n)$. Pour un nombre pair donné, les couples premiers en 2 et 3 sont donc illimités en ce qui concerne **Polignac.**

Il est à noter que le nombre premier 3 ne fait pas partie des nombres $6q + \eta$ (c'est un intérêt majeur de cette écriture) Aux couples précédents, il convient donc d'ajouter :

- si $2n = 6q - 2$, $2n = (6q + 1) - 3$,
- si $2n = 6q$, 3 ne peut faire partie d'aucun couple de nombres premiers dont la somme soit $6n$ car $6q - 3$ est divisible par 3**,**
- si $2n = 6q + 2$, $2n = (6q - 1) + 3$

Enfin, pour $2n = 6q$, on a le choix entre $q_i \leq n$ ou $q_j \leq n$, ce qui multiplie par 2 le nombre de solutions des systèmes de congruence correspondants.

V.3 Analyse de la Conjecture de Goldbach Polignac

V.3.1 Analyse pour $2n = 6q$

Soit un nombre $a = 6x + \varepsilon$
Son complément à $2n$ est $b = 6(q - x) - \varepsilon$.

Nous reportant au titre III, il apparaît que ces deux nombres seront premiers jusqu'en p_k , si et seulement si l'on peut trouver un paramètre $\boldsymbol{x}$ tel que:

$$\begin{aligned} x = q_{nk} &\neq i\varepsilon\eta \bmod (6i + \eta) \\ q - x = q - q_{nk} &\neq i\varepsilon\eta \bmod (6i + \eta) \end{aligned} \tag{5.2}$$

pour chaque nombre premier $6i + \eta$ inférieur ou égal au nombre premier p_k .

Les relations (5.2) forment deux paires de congruences, selon que $\varepsilon = +1$ ou -1 ; elles sont équivalentes à :

$$q_{nk} \equiv r_{i\eta} \bmod (6i + \eta) \quad \text{avec} \quad r_{i\eta} \neq i\varepsilon\eta \quad \text{et } r_{i\eta} \neq (-i\varepsilon\eta + q) \bmod (6i + \eta) \tag{5.3}$$

(i est inférieur à $6i + \eta$, mais $(i\varepsilon\eta + n)$ ne l'est pas toujours)

Chaque reste $r_{i\eta}$ doit ainsi respecter 2 conditions.

D'après le titre III, on peut donc affirmer que la quantité de paramètres q_{nk} tels que $a = 6q_{nk} + \varepsilon$ et $b = 6(q - q_{nk}) + \varepsilon$ sont premiers jusqu'en p_k est égale à

$$N_k = 2\left[(5-2)\times(7-2)\times\ldots\times(p_k-2)\right] \tag{5.4}$$

Cette quantité est le double de celle trouvée au titre III, parce que l'on doit envisager les deux cas $(\varepsilon = -1,\ \varepsilon = +1)$ selon que le nombre inférieur du couple est un cadet $6q\ -1$ inférieur à n (alors $\varepsilon = -1$) ou un aîné $6q + 1$ inférieur à n (alors $\varepsilon = +1$).

Notons que la limite de N_k est toujours $\aleph_0$, puisque $2 \times \aleph_0 = \aleph_0$ d'après la théorie des ensembles de **Cantor**.

On peut aussi dire : certes il existe un nombre premier p_k associé à chaque quantité N_k , mais inversement, on peut associer à p_k deux quantité $N_k(\varepsilon)$ suivant que $(\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1)$ d'après la démonstration ci-dessus.

V.3.2 Analyse pour $2n = 6q + 2\eta$

Soit un nombre $a = 6x + \varepsilon$
Son complément à $6q + 2\eta$ est $b = 6(q - x) + \varepsilon$.
Ces deux nombres sont donc tous deux soit des cadets, soit des aînés, suivant que l'on a affaire à $6n - 2$ ou $6n + 2$

Ces deux nombres seront premiers jusqu'en p_k si et seulement si :

$$\begin{aligned} x = q_{nk} &\neq i\varepsilon\eta \bmod (6i+\eta) \\ q - x = q - q_{nk} &\neq i\varepsilon\eta \bmod (6i+\eta) \end{aligned} \tag{5.5}$$

pour chaque nombre premier $6i+\eta$ inférieur ou égal à p_k.
Les paramètres q_{nk} doivent donc respecter le système de congruences

$$q_{nk} \equiv r_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad \text{avec} \quad r_{i\eta} \neq i\varepsilon\eta \;\text{ et }\; r_{i\eta} \neq (-i\varepsilon\eta + q) \bmod (6i+\eta) \tag{5.6}$$

Le nombre des paramètres q_{nk} est égal à

$$N_k = (5-2)\times(7-2)\times \ldots .\times(p_k - 2) \tag{5.7}$$

car la valeur de ε est fixée dès le départ par le nombre $2n = 6q + 2\varepsilon$.

V.4 Conjecture de Polignac

V.4.1 Analyse générale

Dès que $|q_{nk}| > q$, nous avons affaire à la conjecture de **Polignac**.
Les deux conditions $r_{i\eta} \neq i\eta$ et $r_{i\eta} \neq (-i\eta + q)$ laissent à $r_{i\eta}$ la possibilité d'acquérir une quantité de valeurs égale à $6i+\eta-2$, soit :

$$\begin{aligned} &3 \text{ pour } p_i = 6\times1-1 = 5 \\ &5 \text{ pour } p_i = 6\times1+1 = 7 \\ &9 \text{ pour } p_i = 6\times2-1 = 11 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le nombre de composantes des vecteurs $\overrightarrow{r_{nk}}$ est donc, comme nous l'avons constaté au titre III :

$$\begin{aligned} N_k &= 3\times5\times9\times\ldots .\times(p_k-2) \text{ pour les nombres } 2n \text{ du type } 2n = 6q + 2\varepsilon \\ N_k &= 2\left[3\times5\times9\times\ldots .\times(p_k-2)\right] \text{ pour les nombres } 2n \text{ du type } 2n = 6q \end{aligned}$$

Lorsque p_k augmente, le nombre N_k de paramètres de couples $(6q_{nk}+\varepsilon),(6(q-q_{nk})\pm\varepsilon)$ premiers par rapport à $2, 3, 5, \ldots, p_k$ est majoré chaque fois par $p_k - 2$.
Dans le premier intervalle $(0, \Pi_k)$ on trouvera, parmi les paramètres des couples premiers par rapport à $2, 3, 5, \ldots, p_k$, des paramètres q_{nk} de nombres $(6q_{nk}+\varepsilon)$ et $(6(q-q_{nk})\pm\varepsilon) \bmod \Pi_k$ qui sont strictement premiers, mais cela en quantité, pour le moment, indéfinie.

La poursuite de l'analyse est identique à celle du titre III et permet de conclure ainsi :

- il existe une quantité illimitée de couples de nombres premiers $\left(6q_{nk}+\varepsilon\right)$ et $\left[6\left(n-q_{nk}\right)+\varepsilon\right]$ dont la somme algébrique est égale à $6n+2\varepsilon$
- il existe une double quantité de nombres premiers $\left(6q_{nk}+\varepsilon\right)$ et $\left(6\left(n-q_{nk}\right)-\varepsilon\right)$ dont la somme algébrique est égale à $6n$.

Comme $\left|q_{nk}\right|$ est supérieur à q, cette somme algébrique est une différence arithmétique.

Tout nombre pair est indéfiniment la différence de deux nombres premiers ; la quantité de ces couples a la puissance $\aleph_0$ de l'ensemble des nombres entiers naturels.

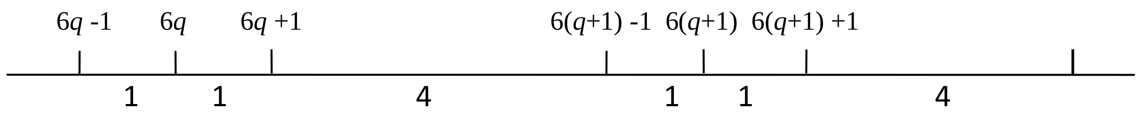
V.4.2 Infinitudes des couples 'Polignac' pour $2n = 2,\, 4,\, 6q \pm \left(2\eta \text{ ou } 0\right)$

Premiers jumeaux

Ils ont fait l'objet spécial du titre IV

Premiers cousins

Ce sont ceux dont la différence vaut 4.
Ces nombres peuvent s'écrire $4=\left(6(q+1)-1\right)-\left(6q+1\right)$ d'une façon et d'une seulement ainsi que justifié par le croquis ci-dessous :



Les couples de nombres premiers cousins sont donc aussi nombreux que les nombres premiers.

Premiers 'sexy' et n fois 'sexy'.

Les couples de nombres premiers 'sexy' dont la différence vaut 6 peuvent s'écrire, toujours d'après le croquis ci-dessus :

$$6=\left[6\left(q+1\right)-1\right]-\left[6q-1\right]$$
$$6=\left[6\left(q+1\right)+1\right]-\left[6q+1\right]$$

Deux façons d'écrire les couples de nombres 'sexy' premiers, lesquels sont donc deux fois plus nombreux que les couples de cousins premiers. Mais leur limite reste $2\times\aleph_0=\aleph_0$ ainsi qu'on l'a vu en **III.1.1.**

Premiers dont la différence est $2n=6q+2\eta$

Cf. V.3.2 ci-dessus.

Les nombres premiers dont la différence vaut 2 ou $(6q)$ croissent deux fois plus vite que les nombres premiers
Les nombres premiers dont la différence vaut 4 ou ($6q\pm 2\eta$) croissent aussi vite que les nombres premiers

V.4.3 Les constellations de nombres premiers

Elles doivent respecter certaines formes plus faciles à écrire avec $p=6q+\eta$:

Ainsi, la suite $p,\ p+2,\ p+10$ est impossible parce que $p+2$ impose $p=6q-1,\ p+2=6q+1$ et par conséquent $p+10=6q-1+10=6q-9$ qui est divisible par 3**.**

Par contre, est possible la suite :

$$\begin{aligned}&6q+1,\quad 6q+1+4=6(q+1)-1,\quad 6q+1+6=6(q+1)+1,\\&6q+1+10=6(q+2)-1,\quad 6q+1+12=6(q+2)+1\end{aligned}$$

Ses termes seront tous premiers si, et seulement si les 5 conditions suivantes sont respectées sur les restes du paramètre le plus élevé, c'est-à-dire $(q+2)$:

$$\left[r_i \neq i\eta-2,\quad r_i\neq -i\eta+1,\quad r_i\neq i\eta-1,\quad r_i\neq -i\eta,\quad r_i\neq i\eta\right]$$
$$\forall\ (6i+\eta)\ \text{premier} \leq 6(q+2)+1$$

Suivant les premiers $6i+\eta$, certaines conditions peuvent être redondantes, ainsi : pour $6i-1=5$, les restes interdits sont $-3,\,0,\,-2,\,1,\,-1$ tandis que pour $6i+1=7$, ils deviennent $-1,\,0,\,0,\,-1,\,+1$.
Dans le deuxième cas, il ne reste que 3 conditions au lieu de 5**.**

Ces constellations se répètent indéfiniment avec un nombre cr de conditions variables sur les restes. D'où,

$$N_k=\left(p_{a+1}-cr\right)\left(p_a-cr\right).....\left(p_k-cr\right)\quad|\quad p_a<cr$$

comme nous l'avons vu en III.3.2

V.5 Démonstration globale de la Conjecture de Goldbach

L'intérêt principal de cette première approche est de montrer que la conjecture est vraie. Une analyse fine est développée au titre suivant.

Bornons nous à l'étude du cas $2n=6q+2$ et écrivons

$$\begin{aligned}&2n=a+b\\&a=6q_1+1\\&b=6(q-q_1)+1\end{aligned}\tag{5.8}$$

Choisissons q_1 tel que

$$\begin{aligned}&3\leq 6q_1+1\leq n\\&n\leq 6(q-q_1)+1\leq 2n-3\end{aligned}$$

$a = 6q_1 + 1$ est premier jusqu'en p_k si et seulement si

$$q_1 \equiv r_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad | \quad r_{i\eta} \neq i\eta \quad \forall (6i+\eta) \text{premier} \leq p_k \tag{5.9}$$

$b = 6(q - q_1) + 1$ est premier jusqu'en p_k si et seulement si

$$q_1 \equiv q - r^*_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad | \quad q - r^*_{i\eta} \neq i\eta \quad \forall (6i+\eta) \text{premier} \leq p_k \tag{5.10}$$

Rappelons le chapitre III,3.2 : il y a deux conditions sur les restes de la division de q_1 par $(6i+\eta)$; les solutions (5,8) premières jusqu'en p_k sont donc au nombre de $N_k = \prod_{i=3}^{k}(p_i - 2)$ Elles sont cantonnées dans un espace d'étendue $\prod_{i=3}^{k} p_i$ Lesdites solutions comprennent les éventuels couples de nombres strictement premiers et aussi les couples de nombres composés premiers jusqu'en p_k et dont l'un au moins possède un facteur premier supérieur à p_k.

Ces solutions ont une densité moyenne $d_2^k = \prod_{i=3}^{k}(1 - 2/p_i)$; pour la conjecture de **Goldbach** qui nous préoccupe, de l'espace en question on ne conserve que la partie inférieure égale à n, ce qui réduit la quantité des solutions intéressantes à une valeur supérieure à nd_2^k car la densité d_2^k décroit avec *k*.
Le plus grand nombre premier appartenant aux couples premiers dont la somme est 2*n* peut être égal à $2n-3$ et fait alors partie du couple premier (3,2*n*−3) associé à 2*n*.

Choisissons le nombre premier p_m tel que $p_m^2 = 2n - 3$ si $2n-3$ est premier ou bien tel que p_m^2 soit immédiatement supérieur à $2n-3$ dans le cas contraire.

Remplaçant p_k par p_m, les expressions (5.9) et (5.10) deviennent

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv r_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad | \quad r_{i\eta} \neq i\eta \quad \forall (6i+\eta) \text{premier} \leq p_m \\ q_1 &\equiv q - r^*_{i\eta} \bmod (6i+\eta) \quad | \quad q - r^*_{i\eta} \neq i\eta \ \forall (6i+\eta) \text{premier} \leq p_m \end{aligned} \tag{5.11}$$

Des nombres donnés qui, d'une part ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par …… p_m, et qui, d'autre part sont inférieurs à p_{m+1}^2, de tels nombres sont strictement premiers.

Nos deux nombres $6q_1 + 1$ et $6(q - q_1) + 1$ tels que définis ci-dessus sont donc strictement premiers.
La quantité nd_2^k des couples premiers avec p_m est rapidement décroissante: pour $2n = 10$, on trouve $p_m = 7$ et $d_2^m = (1-2/5)(1-2/7) = 0,428571...$; pour $2n = 14$, on trouve $p_m = 11$, et $d_2^m = 0,350635...$.
Ainsi, les valeurs premières a et b liées à $2n$ sont plus denses près des faibles valeurs de p_m et l'on pourra toujours trouver deux nombres a et b inférieurs à p_m^2, même pour les faibles valeurs de $2n$.

$2n$ est toujours la somme d'une certaine quantité de couples de nombres strictement premiers lesquels s'écrivent :

$6q_1 + 1$ et $6(q - q_1) + 1$,

La conjecture de Goldbach est vraie

Nous allons la « démonter » au titre VI suivant. □

V.6 Exemple

Soit le nombre pair $6q+2=122=6\times20+2$

Choisissons $p_k=11 \rightarrow \Pi_k=385$, $6\Pi_k=2310$; d'où le système de congruences avec

	Goldbach	Polignac	
$q_3 \equiv r_3 \bmod 5$	$r_3 \neq -1$	$r_3 \neq +1$	$e_3=-154$
$q_4 \equiv r_4 \bmod 7$	$r_4 \neq +1$	$r_4 \neq -2$	$e_4=-55$
$q_5 \equiv r_5 \bmod 11$	$r_5 \neq -2$	$r_5 \neq 0$	$e_5=-175$

Les valeurs des restes sont données pour $x=q_1$; pour le complément $q-q_1=q-x$, ils changent de signe.
Ci-dessous, le tableau des solutions concernant le théorème de **Goldbach** ($x \leq n=10$).
Leur quantité qui est égale à 4 est supérieure à $nd_2^k=10\times0,305649...=3,06$, ainsi que démontré ci-dessus.

$x=0\times154-3\times55+175=$	$10 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=61$	$6(q-x)+1=61$
$x=+1^*\times154-2\times55+2\times175=$	$9 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=55^*$	$6(q-x)+1=67$
$x=+2\times154-1^*\times55+3\times175=$	$8 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=49^*$	$6(q-x)+1=73$
$x=-2\times154+0\times55+4\times175=$	$7 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=43$	$6(q-x)+1=79$
$x=-1^*\times154+1\times55+5\times175=$	$6 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=37$	$6(q-x)+1=85^*$
$x=0\times154+2^*\times55-5\times175=$	$5 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=31$	$6(q-x)+1=91^*$
$x=+1^*\times154+3\times55-4\times175=$	$4 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=25^*$	$6(q-x)+1=97$
$x=+2\times154-3\times55-3\times175=$	$3 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=19$	$6(q-x)+1=103$
$x=-2\times154-2\times55-2\times175=$	$2 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=13$	$6(q-x)+1=109$
$x=-1^*\times154-1\times55-1\times175=$	$1 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=7$	$6(q-x)+1=115^*$

Repérées en bleu les solutions premières jusqu'en $p_m=11$ sont toutes inférieures à $p_m^2=169$; elles sont strictement premières.

Les solutions concernant le théorème de **Polignac** sont obtenues pour des valeurs ***x*** supérieures à $q=20$

$x=-2\times154+1\times55-5\times175=$	$27 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=163$	$6(q-x)+1=-41$
$x=-1^*\times154+2\times55-4\times175=$	$26 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=157$	$6(q-x)+1=-35^*$
$x=0\times154+3\times55-3\times175=$	$25 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=151$	$6(q-x)+1=-29$
$x=+1^*\times154-3\times55-2\times175=$	$24 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=145^*$	$6(q-x)+1=-23$
$x=+2\times154-2\times55-1\times175=$	$23 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=139$	$6(q-x)+1=-17$
$x=-2\times154-1^*\times55+0\times175=$	$22 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=133^*$	$6(q-x)+1=-11$
$x=-1\times154+0\times55+1\times175=$	$21 \bmod 385 \rightarrow$	$6x+1=127$	$6(q-x)+1=-5$

Les signe astérisque * repère les restes $r_{i\eta}=i\eta$ ou $(q-i\eta)$